

II ПРОЛАЗ ЗРАЧЕЊА КРОЗ МАТЕРИЈУ

2.1. ИНТЕРАКЦИЈА ТЕШКИХ НАЕЛЕКТРИСАНИХ ЧЕСТИЦА СА МАТЕРИЈОМ

Познавање физичких основа интеракције зрачења и преноса енергије је фундаментално у детекцији зрачења, мерењима и контроли, као и за разумевање биолошких ефеката озрачивања живог ткива. Изучавање проласка наелектрисаних честица кроз материју је важно, јер повезује истраживања и развој различитих научних дисциплина. Развој и примена високоенергетских акцелератора тешких јона (са енергијама од неколико GeV/amu) је унапређена добрим разумевањем деловањем тешких наелектрисаних честица на материјалну средину при проласку кроз њу. Коректна интерпретација података из високоенергетског космичког зрачења, која је битна за разумевање разних високоенергетских физичких и астрофизичких феномена, зависи од доброг познавања, како пролаза тешких језгара кроз материју, тако и од одговора детектора.

Треба напоменути да је један од најефикаснијих начина третирања канцера применом високоенергетског зрачења. Предност терапије високоенергетским честицама над електромагнетским зрачењем је вишеструка. Један од разлога је што наелектрисане честице имају бољу релативну биолошку ефикасност (RBE). Такође, боље разумевање интеракције тешких јона са материјом омогућава брже напредовање у истраживању тешкојонске фузије (интензиван снап тешких јона на загрејану плазму деутеријума).

Пролаз наелектрисане честице кроз материју састоји се од низа судара, тако да *судар* постаје основни елемент анализе. У механици се разликују две врсте судара: еластични и нееластични. У еластичном судару долази до преноса кинетичке енергије са једног система на други, али укупна кинетичка енергија свих система који учествују у судару иста је после судара каква је била и пре њега. У нееластичном судару кинетичка енергија система не конзервира се, већ се један њен део губи (или добива) на унутрашња кретања система.

Еластични судари

Главни ефект еластичних судара је *скретање честица* које је утолико вероватније уколико су наелектрисане честице и језгра већа, а енергија честице мања. Скретање при малом углу много је вероватније и чешће него скретање при већем углу.

Губитак енергије у еластичним сударима релативно је мали услед велике разлике у масама. Он се због тога често може да занемари у односу на остале важније губитке.

Нееластични судари

У нееластичном судару са атомом наелектрисана честица може да пренесе део своје кинетичке енергије било на електроне везане за језгро, било на унутрашње кретање у самом језгру.

Нееластични судари наелектрисаних честица са електронским омотачем доводе до ексцитације и јонизације.

Ексцитација

Електрон је примио део енергије од честице која пролази и прешао у неко друго, више енергетско стање. Кад се атом нађе у ексцитованом стању, постоји низ начина којима се отпушта сувишак енергије. Пре свега, треба имати у виду да је атом везан у молекулу, тако да се, прецизније речено, ради о ексцитованом стању молекула. Енергија ексцитације може да се отпусти било дисоцијацијом молекула било емисијом једног или више фотона.

Јонизација

Јонизација је највероватнија у спољној љусци. Уколико дође до јонизације унутрашњих љусака, електрони са даљих љусака их попуњавају уз емисију фотона, преносећи празнину ближе периферији атома. Атом или молекула могу да остану у јонизованом стању дуже времена него што би трајало ексцитација, враћање у нормално стање зависи од расположивих електрона у његовој околини.

Од великог интереса је изучавати механизме посредством којих атоми материје делују на упадне честице, и обрнуто. Најинтересантније и најнеопходније је изучавати начине и облике енергије у које се почетна енергија упадне честице или снопа претвара проласком кроз дату средину. Централна величина која карактерише заустављање честице при проласку кроз материју је *зауставна моћ* (*стоппинг power*). Помоћу ове величине одређују се домет пројектила, дистрибуција његове енергије, депонована енергија у материји, као и многе друге карактеристике.

Било да су базирани на принципу класичне физике или на квантно-механичком приступу (теорији пертурбација) већина теоријских радова је дала резултате да је зауставна моћ пропорционална квадрату атомског броја пројектила и функција је његове брзине. У теоријском третману проласка честице кроз материју, сматрано је да пројектил интерагује са електронима атома мете и да своју енергију губи на побуђење или јонизацију атома. Узмицање језгра атома мете је занемарљиво, док се електромагнетно зрачење, услед промене брзине кретања пројектила, јавља при високим енергијама.

За разлику од Томсона [Thomson, 1912], који је материју кроз коју честица губи своју енергију моделовао као скуп слободних електрона, Бохр је [Bohr, 1913] је сматрао да губитак енергије пројектила потиче од везаних електрона у атомима материје. Везаним електронима приписивао је осцилаторну природу, при чему је дивергенцију ефективног пресека уклонио уводећи коначне вредности домена интеракције, односно, параметара судара.

Развојем квантне механике, примењујући прву Борнову апроксимацију, теорију зауставне моћи су развијали, Bethe, Moller i Bloch [Bethe, 1930; Moller, 1931 i Bloch, 1933]. Ефикасни пресек судара је изведен у функцији импулса, који пројектил преда мети, сматрајући да пројектил делује само на електроне атома мете. При овој Кулоновој интеракцији сматрано је да пројектил губи своју кинетичку енергију на ексцитацију и јонизацију атома мете и да је изгубљена енергија много мања од почетне кинетичке енергије.

Упркос вишедеценијском истраживачком раду на проблемима проласка честице кроз материју многи феномени и детаљи нису у потпуности теоријски објашњени и експериментално потврђени.

Посебно велики проблем представља рачунање зауставне моћи при ниским енергијама пројектила на којима пројектил интензивно размењује електроне са атомима средине. У том случају пројектил се не може сматрати као тачкасто наелектрисање, већ као систем који садржи везане електроне и третира се као *делимично огољен јон*.

Израз за зауставну моћ је написан као сума зауставних моћи (зауставних бројева) сваког осцилатора којим се моделује пројектил и мета. Форма израза омогућује да се сагледа допринос зауставној моћи услед ексцитације пројектила и ексцитације мете, посебно. За конкретан атом мете и пројектил, сума зауставних бројева се утежњава јачинама диполних осцилатора датих атома.

Зауставна моћ се дефинише као количник изгубљене кинетичке енергије пројектила, dE , на пређеном растојању, dx , и тог растојања.

$$S = -\frac{dE}{dx} \quad (1)$$

Јединица за зауставну моћ је J/m . Зауставна моћ је повезана са средњом променом импулса по јединици пређеног пута као

$$S = -\frac{dE}{dx} = -v \frac{dP}{dx} \quad (2)$$

За композитни пројектил као што је делимично огољен јон, молекул или кластер, код кога кинетичка енергија може бити трансформисана у унутрашњу, зауставна моћ је дефинисана као

$$\frac{dE}{dx} = \sum_i v_i \left(\frac{dP}{dx} \right)_i \quad (3)$$

при чему се сумира по свим конституентима кластера [Sigmund, 2004].

Масена зауставна моћ је количник зауставне моћи и густине материје.

$$S = -\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \quad (4)$$

Основна једница је $\frac{J}{kg} m^2$. У пракси се масена зауставна моћ најчешће изражава у $\frac{MeV}{mg} cm^2$.

Параметар који је од основног значаја у атомској, нуклеарној и молекуларној физици је *зауставни ефикасни пресек*, S_c , и дефинише се као [Sigmund, 2004]

$$S_c = \sum_j w_j \sigma_j \quad (5)$$

Сумирање се врши по свим »каналима« реакције услед којих се губи енергија пројектила. w_j и σ_j су изгубљене енергије и ефикасни пресеци при j -тој реакцији.

Губитак енергије, ΔE , за дати пређени пут пројектила, l , је статистичка величина, која има статистичку расподелу $F(\Delta E, l)$. Средња изгубљена енергија је повезана са зауставном моћи према

$$\langle \Delta E \rangle = \int \Delta E \cdot F(\Delta E, l) \cdot d(\Delta E) = -\frac{dE}{dx} \cdot l \quad (6)$$

Флукуација (раштркавање) губитка енергије после пређене путање, l , у материји се описује *варијансом* [Sigmund, 2004]

$$\Omega^2 = \langle (\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2 \rangle \quad (7)$$

Параметар раштркавања губитка енергије, W , се у класичној физици дефинише као

$$W = \frac{1}{n} \frac{d\Omega^2}{dx}, \quad (8)$$

где је n бројна концентрација атома мете (at/m^3).

У квантној физици, параметар раштркавања губитка енергије пројектила се дефинише као [Sigmund, 2004]

$$W = \sum_j w_j^2 \sigma_j. \quad (9)$$

где су w_j и σ_j описани у дефиницијама претходних величина

Параметар судара представља најмање растојање између почетног правца пројектила и мете, која је пре судара у стању мировања.

Домет пројектила је растојање које пређе пројектил у материји док не изгуби сву енергију и преко зауставне моћи се дефинише као

$$R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)}, \quad (10)$$

где је E_0 почетна енергија пројектила.

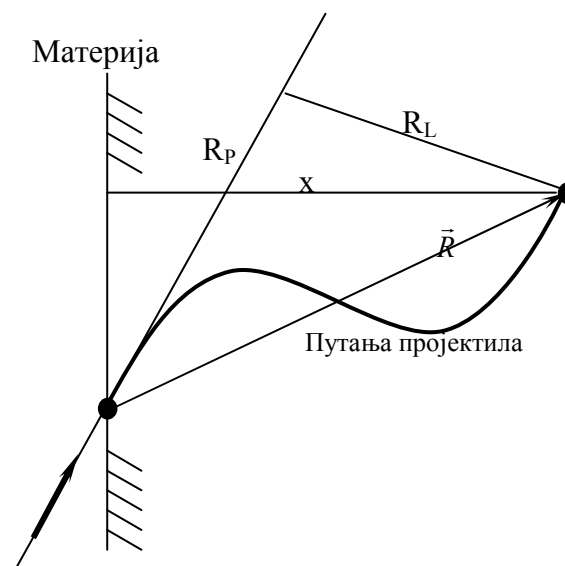
Поред ових величина од интереса је поменути и следеће (Слика 1):

- *Вектор домета*, \vec{R} , је вектор од стартне тачке пројектила до крајње тачке трајекторије.

- *Пројектовани домет*, R_p , представља пројекцију вектора домета на почетни правац кретања пројектила

- *Латерални домет*, R_L , представља компоненту вектора \vec{R} , која је нормална на почетни правац кретања

- *Дубина продирања*, x , представља компоненту вектора \vec{R} дуж правца који је нормалан на раван површине мете.



Слика 1. Величине које се односе на пређено растојање пројектила у материји
 \vec{R} - вектор домета; R_L - латерални домет; R_p - пројектовани домет; x -дужина продирања

I ОПШТЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОЛАСКА НАЕЛЕКТРИСАНИХ ЧЕСТИЦА КРОЗ МАТЕРИЈУ

Наелектрисана честица при проласку кроз материју губи своју енергију преко еластичних и нееластичних судара са атомима мете и у форми електромагнетног зрачења (радијациони губици).

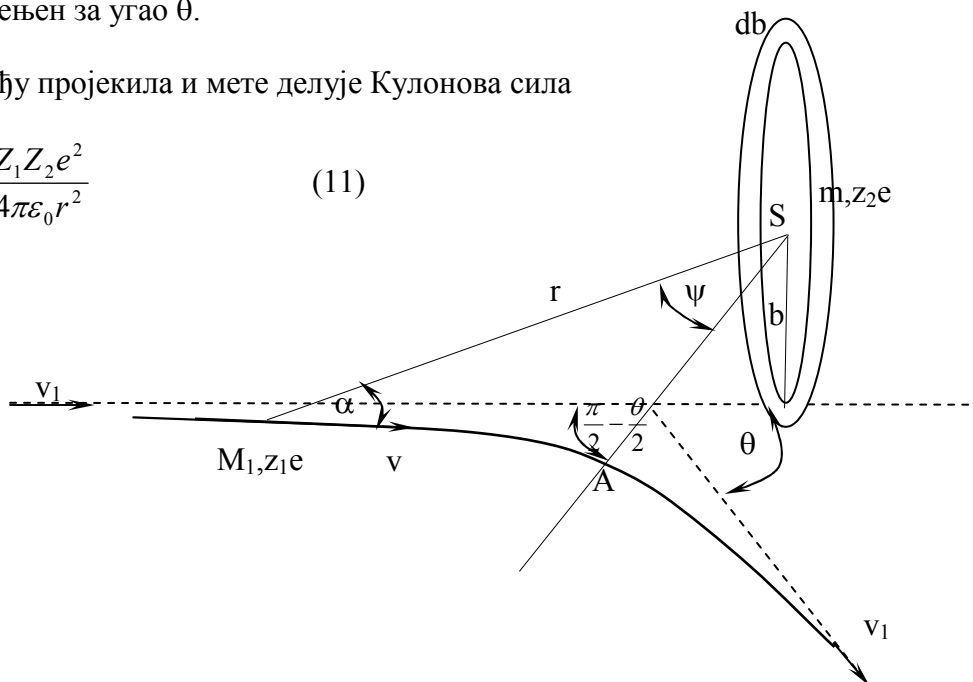
I 1. Судар наелектрисаних честица према Рутхерфорд-овом моделу

У овом поглављу приказано је извођење формуле за ефикасни пресек и губитак енергије тешке наелектрисане честице, која се креће и судара са наелектрисаном честицом. Судар је третиран према Радерфорд-овом моделу преко параметара судара.

Честица масе M_1 , наелектрисања z_1e , која се креће брзином v_1 и приближава се честици масе m ($M_1 \gg m$) наелектрисања z_2e , која релативно мирује, Слика 2. Почетни правац кретања упадне честице је на растојању b (параметар судара) од центра расејања. Након интеракције, правац кретања упадне честице биће промењен за угао θ .

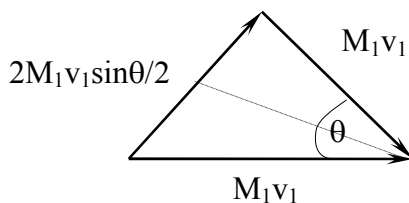
Између пројектила и мете делује Кулонова сила

$$F = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (11)$$



Слика 2. Рутхерфорд-ов модел расејања

Ако се узмак честице која представља центар расејања занемари, може се сматрати да се брзина пројектила током расејања мало мења. Услед дејства силе долази до промене импулса, чија промена износи $\Delta p = 2M_1v_1 \sin \theta/2$, у смеру SA (Слика 2. и Слика 3.).



Слика 3. Троугао промене импулса

Промена импулса се може израчунати преко силе

$$\Delta p = \int F dt = \int_0^{\infty} \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\psi) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\psi) \frac{ds}{v} \quad (12)$$

$$\Delta p = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\psi)}{r^2 v} \frac{rd\psi}{\sin(\alpha)} \quad (13)$$

Према закону одржања момента импулса важи да је $bv = vr \sin \alpha$, тако да је промена импулса једнака

$$\Delta p = \frac{z_1 z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 bv} \cos \frac{\theta}{2} \quad (14)$$

Пошто је на почетку предпостављено да упадна честица има веома велику масу у односу на честицу са којом се судара, скретање упадне честице је

веома мало, и може се поставити да је $\square=0$. Заменом у израз (12) да је $z_2=1$, добија се

$$\Delta p = \frac{z_1 e^2}{2\pi\epsilon_0 b v} \quad (15)$$

За нерелативистичко кретање енергија коју пројектил преда мети једнака је

$$Q = \frac{\Delta p^2}{2m} \quad (16)$$

Односно, заменом релације (15) за предату енергију се добија

$$Q = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{z_1^2 e^4}{m b^2 v^2} \quad (17)$$

Ако пројектил пролази кроз материју, која има N_2 електрона (центра расејења) у јединици запремине, тада се укупна изгубљена енергија пројектила, који у материји пређе растојање dx , може написати као

$$dE = 2\pi N_2 dx \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} Q \cdot b \cdot db \quad (18)$$

Замењујући (17) у (18) се добија

$$dE = 2\pi N_2 dx \frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{z_1^2 e^4}{m v^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} \quad (19)$$

Из претходне релације се добија да је

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{z_1^2 e^4}{m v^2} N_2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \quad (20)$$

Губитак енергије пројектила, дат изразом (20), зависи од наелектрисања, масе и брзине пројектила и атома из којих је састављена материја

Проблем који се јавља при рачунању губитка енергије пројектила преко параметара судара, је дефинисање минималне и максималне вредности параметара судара. Уколико се за минималну вредност параметара судара узме да је $b_{\min}=0$, аргумент логаритамске функције дивергира. Сличан проблем настаје ако се за максималну вредност параметра судара узме $b_{\max}=\infty$. При овим вредностима параметара судара израз (18) за рачунање губитка енергије пројектила ће дивергирати. Како је тај проблем решио Bohr, биће речено у поглављу I 3.

I 2. Процеси губитка енергије пројектила при проласку кроз материју

Кулонова интеракција тешких наелектрисаних честица са атомским електронима је главни узрок губитка енергије пројектила при проласку кроз материју и највећи проценат енергије се губи услед те интеракције. Постоји више процеса на основу којих тешке наелектрисане честице губе своју енергију приликом интеракције са материјом кроз коју пролазе (ресејање, ехцитација, јонизација, губитак енергије зрачењем, и др.). Сви ови процеси су јако сложени и могу се класификовати у шест група:

1. ехцитација и јонизација атома мете;
2. ехцитација и јонизација пројектила;
3. размена наелектрисиња;
4. узмак језгра атома мете;
5. електромагнетно зрачење и
6. нуклеарне интеракције.

Приликом судара пројектила са атомом мете може доћи до ехцитације атома мете, односно да његови електрони пређу у виши енергетски ниво. Енергија коју електрони атома мете добијају при таквом прелазу потиче од изгубљене кинетичке енергије пројектила. Уколико је та енергија довољно велика може доћи до одвајања електрона из атома, што се назива *примарном*

јонизацијом. Тако настали електрони-примарни електрони могу имати довољну енергију да и даље изазову јонизацију атома мете-секундарну јонизацију.

При успоравању пројектила који пролази кроз материју, могућност да за себе веже електроне од атома мете постаје више вероватна. Када пројектил захвати електроне од атома мете, тада се он не третира као *тачкасто* неелектрисање, већ као *делимично огољен јон*. Приликом судара са метом делимично огољен јон може да изгуби кинетичку енергију, а да је не преда атому мете, већ да се она утроши на његово побуђење или јонизацију.

Процес је мало сложенији уколико се атом мете и делимично огољен јон налазе у ексцитованим стањима пре судара. У том случају пројектил, након интеракције са атомом мете, може да има већу кинетичку енергију, која потиче од његове деексцитације или деексцитације атома мете.

Поред ексцитације и јонизације атома мете и пројектила, додатни процес услед којег пројектил губи своју енергију је узмак атома мете. Приликом интеракције пројектила и атома мете може да се деси да њихова унутрашња стања остану непромењена, а да се мета помери из свог првобитног положаја (еластично расејање). Bethe је у свом раду о проласку наелектрисаних честица кроз материју [Bethe, 1930], показао да је енергија ексцитације атома мете M_1/m пута већа него енергија која је потребна да се атом узмакне. У том раду Бетхе је показао да се енергија коју пројектил губи услед еластичног судара и узмицања атома односи према енергији коју губи при нееластичном судару на ексцитацију атома, као $\frac{z_2 m}{M_1}$. То значи да је изгубљена енергија пројектила услед узмака атома мете мања од 0.1% и приликом разматрања интеракције, узмак атома се може занемарити и атом материје третирати као бесконачно тешка мета.

Интеракција између брзе наелектрисане честице и језгра може да доведе до наглог убрзања. По законима електродинамике, то доводи до емисије електромагнетног зрачења. Тако изазвано закочно зрачење је важан механизам губитка енергије честице при пролазу кроз материју уколико пројектил има високу кинетичку енергију. При нижим енергијама овај процес је мање доминантан. Други облик, радијативног губитка, који се у основи разликује од закочног зрачења, јесте Черенково зрачење. Оно се јавља као последица

лонгитудиналне поларизације средине, при проласку наелектрисане честице, чија брзина прелази фазну брзину светлости у тој средини.

При високим енергијама пројектила, дејство нуклеарних сила се може занемарити, јер ефикасни пресек интеракције преко нуклеарних сила 10^{-10} пута мањи од ефикасног пресека интеракције са електронским омотачем.

Укупан губитак енергије неке честице при проласку кроз материју је услед судара и зрачења и зауставна моћ материје се може дефинисати као

$$S = -\frac{dE}{dx} = \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{sudar}} + \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{zra}}, \quad (21)$$

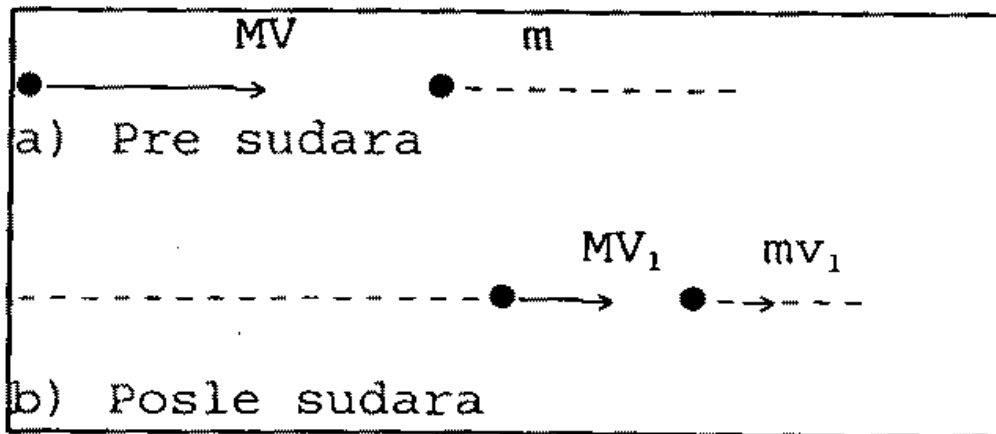
где знак “минус” говори да се енергија пројектила губи при проласку кроз материју.

При проласку кроз материју, тешке наелектрисане честице највише предају енергију електронима атома мете. При томе се атом побуђује или јонизује. С обзиром да је маса електрона много мања од масе пројектила, скретање пројектила је занемарљиво и мулти-ресејање није потребно разматрати.

За сударе између наелектрисаних или неутралних честица, лаких или тешких, важе закони одржања енергије и импулса. Ти закони одређују односе између углова расејања и узмака и дају резултате који су независни од детаљног механизма судара.

МАКСИМАЛНО ПРЕНЕТА ЕНЕРГИЈА У ЈЕДНОМ СУДАРУ

Претпоставља се да се тешка наелектрисана честица креће брзо у поређењу са електроном и да је пренета енергија велика у поређењу са везивном енергијом електрона у атому. Под овим условима може се узети да је електрон иницијално слободан и да је у миру. Проблем се прво третира класично.



Слика. Чеони судар честице масе M и брзине V са слободним електроном у миру

Слика шематски приказује тешку честицу (масе M и брзине v) која се приближава електрону (масе m у миру). После судара, који мора бити чеони да би дошло до максималног преноса енергије, честице се крећу брзинама V_1 и v_1 дуж путање иницијалне честице. Могу се применити закони одржања кинетичке енергије и импулса:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$MV = MV_1 + mv_1$$

$$V_1 = \frac{(M - m)}{M + m}V$$

Користећи овај израз за V_1 може се наћи максимално пренета енергија:

$$Q_{\max} = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{4mME}{(M + m)^2}$$

где је E кинетичка енергија иницијалне тешке честице. Ако су масе једнаке, $Q_{\max}=E$ и то је случај када иницијална честица преда сву своју енергију у судару, слично судару билијарских кугли.

Тачан релативистички израз за максимално пренету енергију је:

$$Q_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{2\gamma m}{M} + \frac{m^2}{M^2}}$$

Где су m и M масе мировања електрона и тешке честице, респективно,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

. и c је брзина светлости. Осим у крајњем релативистичком

случају претходна једначина се своди на следећу једначину, што је уобичајени

релативистички резултат.

$$Q_{\max} = 2\gamma m V^2 = 2\gamma m c^2 \beta^2$$

II ТЕОРИЈСКИ ТРЕТМАН ЗАУСТАВНЕ МОЋИ

У овој Глави дат је приказ теоријског третмана гуитка енергије пројектила који пролази кроз материју на основу класичне и квантне физике. На почетку је приказан метод којим је Bohr израчунао зауставну моћ на основима класичне физике користећи параметар судара [Bohr, 1913]. За разлику од Тхомсона [Thomson, 1912], који је материју моделовао слободним електронима, Bohr је електроне материје третирао као класичне хармонијске осцилаторе, приписујући им угаону учестаност, ω , и описивао интеракцију пројектила са њима.

Двадесет година касније, Bethe је извео на основи квантне механике и прве Борнове апроксимације, израз за зауставну моћ [Bethe, 1930]. При томе је диференцијални ефикасни пресек изражен као функција предатог импулса. У свом раду сматрао је да пројектил губи енергију на ексцитацију и јонизацију атома мете.

Bloch је кориговао Betheov израз за зауставну моћ [Bloch, 1933]. Његова корекција даје прелаз у класичну Bohrovu теорију зауставне моћи и додаје се Betheovom изразу за мале брзине пројектила [ICRU49]

Bohr - Bethe – Bloch-ова формула за зауставну моћ одступа од експерименталних података при нижим вредностима кинетичке енергије пројектила. Уведене су корекције које су ублажиле теоријска одступања од експерименталних резултата. То су корекција љуске, корекција густине и Баркасова корекција. Оне ће детаљно бити описане на крају овог поглавља.

II 1. Bohr-ов рачун зауставне моћи

Bohr је полазио од тога да су ефекти везивања електрона битни за губитак енергије пројектила. У ранијим радовима је проблем проласка наелектрисаних честица кроз материју третиран узимајући у обзир сударе са

слободним електронима. За максималну вредност параметра судара узета је вредност која би уклонила дивергенцију у формули за губитак енергије пројектила. Ова дивергенција је у смислу да интеграл Rutherfordovog диференцијалног пресека дивергира. Ограничена вредност параметара судара увођена је и у ранијим радовима. Сматрано је да максимална вредност параметара судара одговара радијусу атома, изван кога је дејство сила једнако нули. Thomson је предлагао да максимална вредност параметара буде међуелектронски простор [Thomson, 1912].

Један од оригиналних закључака Bohra је да се губитак енергије пројектила, који пролази кроз материју састоји од две компоненте: губитак услед интеракције са језгром мете (*nuclear stopping*) и губитак енергије услед интеракције пројектила са електронима атома мете (*electronuc stopping*). У својим првим радовима Bohr је дошао до закључка да је губитак енергије пројектила услед интеракције са електронима много пута већи од енергије која се изгуби на узмак атома. До овог закључка је дошао преко кинематике судара и релативног односа масе мноштва електрона мете и језгара. Први је у теоријском третману зауставне моћи увео структуру атома тако што је електронима атома мете приписао осцилаторну природу, доделио орбиталне фреквенције добијене из оптичких спектра и рачунао предату енергију за такве хармонијске осцилаторе.

Бохр је рачунао зауставну моћ користећи параметар судара. Из релације (15) се види да импулс, који пројектил преда електрону, зависи од параметара судара, b . Израз (18), који представља изгубљену енергију пројектила дивергира уколико се разматра чеони судар ($b_{\min}=0$) и уколико се сматра да је пројектил бесконачно удаљен од електрона мете са којим интерагује ($b_{\max} = \infty$).

Максимална вредност предатог импулса, при чеоном судару једнака је $2m_e v$, уколико је маса упадног пројектила много већа од масе електрона. Из релације (15) за минималну вредност параметара судара се добија

$$b_{\min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 e^2}{mv^2} \quad (22)$$

При интеракцијама пројектила и електрона мете са великим параметром судара, Bohr је сматрао да постоји одређено време интеракције. Уколико је то време много дуже од орбиталног периода електрона, те интеракције треба занемарити. Отуда махимална вредност параметра судара износи

$$b_{\max} = \frac{v}{\omega} \quad (23)$$

где је ω учестаност осциловања електрона у атомима мете.

Замењујући минималну и максималну вредност параметара судара у израз (20) за зауставну моћ се добија

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{z_1^2 e^4}{mv^2} N_2 \ln \left(4\pi\epsilon_0 \frac{mv^3}{z_1 e^2 \omega} \right) \quad (24)$$

Постоји још један приступ рачунању зауставне моћи коришћењем параметара судара, помоћу којег је Bohr до сличног израза. Претпоставио је да постоји критична вредност параметара судара, b_1 , тако да судари са параметром $b > b_1$ могу бити третирано као електромагнетна екситација наелектрисаног хармонијског осцилатора у униформном електричном пољу насталом проласком наелектрисане честрице. Судари са параметром $b < b_1$ могу бити третирано као расејање пројектила на слободним електронима.

Уз претпоставку да је маса пројектила много већа од масе електрона, $M_1 \gg m$, Bohr је добио да је изгубљена енергија пројектила, у функцији од параметра (за веће вредности параметара судара) судара има облик [Bohr, 1913]

$$\Delta E(b) = \frac{2z_1^2 e^4}{mv^2 b^2} \left(\xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{\xi^2 K_0^2(\xi)}{\gamma^2} \right), \quad b > b_1 \quad (25)$$

где је $\xi = \frac{\omega b}{v}$, \square је кружна учестаност осцилатора, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, а $K_{0,1}(\square)$ су

Беселове функције [Митриновић, 1991].

За мање вредности параметара садара добијен је израз

$$\Delta E(b) = \frac{2z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} \frac{1}{b^2 + (Z_1 e^2 / mv^2 \gamma)^2}, \quad b < b_1 \quad (26)$$

Зауоставна моћ за сударе са $b > b_1$ је израчуната интеграцијом од $b=b_1$ до $b=\infty$ [Jackson, 1975]:

$$S_{>b_1} = \frac{4\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} \left(\xi_1 K_1(\xi) K_0(\xi) - \frac{1}{2} \beta^2 \xi_1^2 (K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)) \right), \quad (27)$$

а интеграцијом израза (26) $b=0$ до $b=b_1$ зауоставна моћ има облик

$$S_{<b_1} = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} \ln \left(1 + \left(\frac{mv^2 \gamma b_1}{Z_1 e^2} \right)^2 \right). \quad (28)$$

$S_{>b_1}$ дивергира када b_1 тежи нули и $S_{<b_1}$ такође, дивергира ако b_1 тежи бесконачности. Бирајући да је $b_1 \ll \gamma/\omega$ и $b_1 \gg Z_1 e^2 / mv^2 \gamma$, ове две једначине се могу написати као:

$$S = \frac{4\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} N \left(\ln \frac{1.123mv^3}{Z_1 e^2 \omega} - \ln(1 - \beta^2) - \frac{\beta^2}{2} + R_1 \right) \quad (29)$$

где је $R_1 = R_1(b)$ функција од параметра судара и има облик:

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1 e^2}{mv^2 \gamma b_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \xi_1^2 \left(1 - \frac{2 \left(0.577 + \ln \left(\frac{\xi_1}{2} \right) \right)^2}{\gamma^2} - 2\beta^2 \left(0.077 + \ln \left(\frac{\xi_1}{2} \right) \right) \right) \quad (30)$$

Види се да Bohr-ова формула за зауставну моћ садржи и чланове које се односе на релативистички ефекат. За нерелативистички случај у SI јединицама зауставна моћ према Bohr-у има облик

$$S = \frac{4\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} N \ln \left(4\pi\epsilon_0 \frac{1.123 m v^3}{Z_1 e^2 \omega} \right) \quad (31)$$

II 2. Квантно - механички рачун зауставне моћи

Двадесетих година прошлог века дошло се на идеју да се квантни ефекти укључе у проблем зауставне моћи. Хендерсон је 1922. применио концепт дискретних енергетских нивоа ограничавајући могуће енергетски прелазе у вредности испод јонизационог потенцијала, [Henderson,1922]. Гаунт 1927. је дошао до истог резултата као и Bohr тако што је дејство атома средине на упадну честицу третирао као пертурбацију [Gaunt, 1927].

Bethe [Bethe, 1930] је зауставну моћ рачунао квантно механички у првој Born-овој апроксимацији, при чему је систем »наелектрисана честица + атом« третирао као квантно механички систем. У свом раду је узео у обзир да пројектил губи своју кинетичку енергију на побуђење и јонизацију атома мете.

II 2.2. Bethe-ов рачун зауставне моћи

Разлика између Bohrovog и Betheovog рачунања диференцијалног ефикасног пресека је у томе што је Bethe користио предати импулс у првој Борновој апроксимацији, а не параметар судара. За веома мале параметре судара, класичан третман не даје добре резултате.

Зауставна моћ се коришћењем диференцијалног ефикасног пресека може дефинисати као

$$-\frac{dE}{dx} = N \sum_n (E_n - E_0) \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} d\sigma_n \quad (71)$$

где је N је број честица мете по јединици запремине; Q_{min} и Q_{max} су минимална и максимална енергија коју пројектил може да преда мети, при чему ће се вредност импулса пројектила, p , променити за вредност q на вредност p' ; ($q=p'-p$); E_n и E_0 су својствене вредности енергије за побуђено и основно стање атома мете.

Према Bethe-у диференцијални ефикасни пресек у првој Bornовој апроксимацији је дат као (извођење се може видети и у [Fano, 1963])

$$d\sigma_n = \frac{2\pi}{\hbar v} \left| \langle p'n | \hat{H}' | p,0 \rangle \right|^2 \delta(E'+E_n - E) \frac{d\vec{p}'}{h^3} \quad (72)$$

где $|p,0\rangle$ и $|p',n\rangle$ представљају почетно и коначно стање система

“атом+пројектил”.

δ функција намеће закон одржања енергије. Енергија система пре судара једнака је енергији система после судара

$$E + E_0 = E' + E_n \quad (73)$$

где су E и E' енергије пројектила, пре и после судара.

С обзиром да је погодније интеграцију вршити по предатој енергији

пројектила $Q = \frac{q^2}{2m}$, диференцијал, $d\vec{p}'$, у релацији (72) се може

трансформисати као

$$d\vec{p}' = p'^2 \frac{dp'}{dE'} dE' d\Omega \equiv p'^2 \frac{1}{v'} dE' d\Omega \quad (74)$$

Заменом у релацију (72) диференцијални ефикасни пресек постаје

$$d\sigma_n = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^4 v'} \left| \langle p'n | \hat{H}' | p,0 \rangle \right|^2 p'^2 d\Omega \quad (75)$$

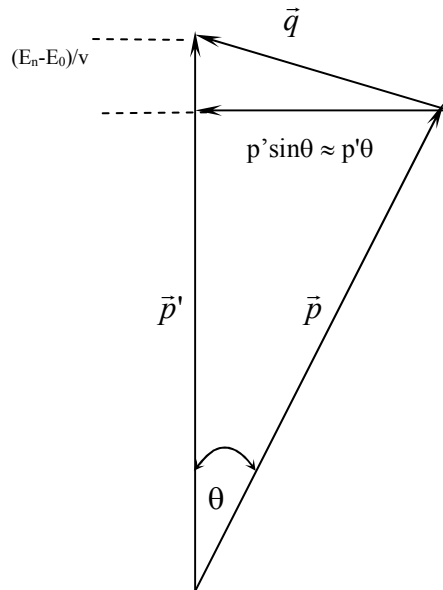
Пошто је маса пројектила много већа од масе електрона, угао расејања је врло мали и $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = 2\pi\theta d\theta$, те се добија

$$p'^2 d\Omega = 2\pi p'^2 \theta d\theta \quad (76)$$

На Слици 4 су приказани вектори импулса пројектила, \vec{p} и \vec{p}' , пре и после судара, респективно. Њихова разлика је предати импулс $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$. Угао θ је угао између вектора импулса пре и после судара. Једна компонента предатог импулса \vec{q} се односи на побуђење атома мете, а друга на промену правца пројектила. Ако је $\vec{q} \ll \vec{p}$ тада је $p' \sin \theta = p' \theta$

Са Сликe 4 се види да је квадрат предатог импулса једнак

$$q^2 = p'^2 \theta^2 + \frac{(E_n - E_0)^2}{v^2} \quad (77)$$



Слика 4. Вектори импулса при судару пројектила са атомом.

p (p') је импулс пројектила пре (после) судара; $q = p' - p$.

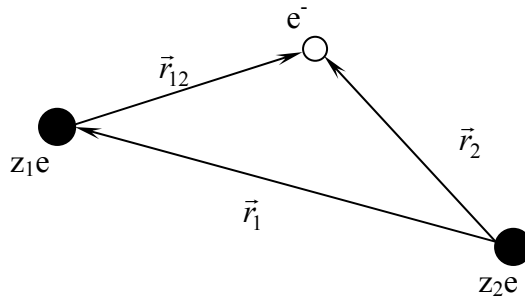
Из релације (77) се добија да је $q dq = p'^2 \theta d\theta$. Имајући у виду да је вредност предате енергије једнака $Q = \frac{q^2}{2m}$, из релације (76) се добија

$$p'^2 d\Omega = 2\pi q dq = 2\pi m dQ \quad (78)$$

Заменом релације (78) у израз за диференцијални ефикасни пресек (израз(75)) добија се

$$d\sigma_n = \frac{m}{2\pi\hbar^4 v^2} \left| \langle p'n | \hat{H}' | p,0 \rangle \right|^2 dQ \quad (79)$$

На Слици 5 приказан је међусобни положај тачкастог пројектила ($z_1 e$) и мете ($z_2 e + e^-$). Радијус вектор, \vec{r}_1 , је вектор положаја пројектила у односу на језгро мете; радијус вектор, \vec{r}_2 , је вектор положаја електрона мете у односу на језгро мете; \vec{r}_{12} је вектор међусобног положаја пројектила и електрона мете.



Слика 5. Радијус вектори положаја пројектила и електрона у атому мете у односу на језгро атома мете

Пошто се разматра само интеракција пројектила и електрона у атому, тада се њихова интеракција може према слици описати као $\hat{H}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 e^2}{\hat{r}_{12}}$.

Израз за диференцијални ефикасни пресек постаје

$$d\sigma_n = \frac{z_1^2 e^4 m}{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^4 v^2} \left| \langle p' | \langle n | \frac{1}{\hat{r}_{12}} | p \rangle | 0 \rangle \right|^2 dQ \quad (80)$$

Матрични елемент $M = \langle p' | \langle n | \frac{1}{\hat{r}_{12}} | p \rangle | 0 \rangle$ се рачуна као

$$M = \int \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} \psi_n^*(\vec{r}_2) \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} \psi_0(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (81)$$

где су ψ својствена стања електрона атому, а $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ талсне функције слободне честице (пројектила пре и после интеракције). Даље, матрични елемент постаје

$$M = \int d\vec{r}_2 \psi_n^*(\vec{r}_2) \psi_0(\vec{r}_2) \underbrace{\int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} d\vec{r}_1}_{I_2} \quad (82)$$

Интеграл I_2 се рачуна увођењем смене [Ивановић, 1974]

$$I_2 = \int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} d\vec{r}_1 = \int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 \quad (83)$$

Након увођења смене $\vec{u} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $d\vec{u} = d\vec{r}_1$, интеграл I_2 постаје

$$I_2 = \int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot(\vec{u}+\vec{r}_2)} \frac{1}{|\vec{u}|} d\vec{u} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_2} \underbrace{\int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{u}} \frac{1}{|\vec{u}|} d\vec{u}}_{4\pi\hbar^2/q^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_2} \quad (84)$$

Користећи вредност интеграла I_2 , матрични елемент постаје

$$M = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \int d\vec{r}_2 \psi_n^*(\vec{r}_2) \psi_0(\vec{r}_2) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_2} = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \langle \psi_n | e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}_2} | \psi_0 \rangle \quad (85)$$

Заменом у израз за диференцијални ефикасни пресек (израз (80)) добија

се

$$d\sigma_n = \frac{z_1^2 e^4 m}{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^4 v^2} \left(\frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \right)^2 \left| \langle \psi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{r}_2} | \psi_0 \rangle \right|^2 dQ \quad (86)$$

Диференцијални ефикасни пресек се може изразити коришћењем предате енергије $Q = \frac{q^2}{2m}$ као

$$d\sigma_n = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} \left| \langle \psi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{r}_2} | \psi_0 \rangle \right|^2 \frac{dQ}{Q^2} \quad (87)$$

Матрични елемент у изразу (87) се може развити у ред, за малу вредност предатог импулса, q . Уколико се претпостави да је вектор \vec{q} у правцу z -осе, може се написати

$$\langle \psi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{r}_2} | \psi_0 \rangle = \frac{i}{\hbar} q \langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle \quad (88)$$

На основу тога, диференцијални ефикасни пресек у релацији (87) постаје

$$d\sigma_n = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} \frac{q^2}{\hbar^2} \left| \langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle \right|^2 \frac{dQ}{Q^2} \quad (89)$$

Након мале трансформације, користећи везу $Q = \frac{q^2}{2m}$ добија се

$$d\sigma_n = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} \frac{2m}{\hbar^2} \left| \langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle \right|^2 \frac{dQ}{Q} \quad (90)$$

Заменом релације (90) у релацију (71) израз за зауставну моћ постаје

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} N \sum_n (E_n - E_0) \frac{2m}{\hbar^2} \left| \langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle \right|^2 \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} \frac{dQ}{Q} \quad (91)$$

Максимална вредност енергије коју пројектил може да преда атому мете износи $Q_{\max} = 2mv^2$, док је минимална вредност предате енергије је она енергија која је потребна да атом из основног стања пређе у неко побуђено стање или да се јонизује, тј. $E_{\min} = E_n - E_0$. На основу тога, релација (91) постаје

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} N \sum_n (E_n - E_0) \frac{2m}{\hbar^2} |\langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle|^2 (\ln(2mv^2) - \ln(E_n - E_0)) \quad (92)$$

Користећи правило сумирања $\frac{2m}{\hbar^2} \sum_n (E_n - E_0) |\langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle|^2 = z_2$ (Thomas-Reiche-Kuhn sum rule) [Bethe, 1930], где је z_2 редни број атома мете, релација (92) се своди на

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} z_2 N \ln \frac{2mv^2}{I} \quad (93)$$

при чему је I јонизациони потенцијал атома мете и дефинише се као

$$\ln(I) = \frac{2m}{\hbar^2 z_2} \sum_n \ln(E_n - E_0) |\langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle|^2 \quad (94)$$

Величина $f_n = \frac{2m(E_n - E_0)}{\hbar^2 z_2} \left| \sum_j \langle n | x_j | 0 \rangle \right|^2$ назива се јачина диполног

осцилатора

II 2. 3. Blochov израз за зауставну моћ

Bloch је дошао не идеју [Bloch, 1933] да Bohrovу формулу, која се заснива на класичној физици, и Betheovu, засноване на квантној физици, уједини у једну формулу. Bloch је посебно разматрао сударе са малим и великим параметром судара. За мале параметре судара, Bloch је интеркацију пројектила са метом третирао као расејање пројектила на слободним електронима (исто као Bohr). За велике параметре судара увео је диполну апроксимацију и показао да виши чланови у тој апроксимацији нестају ако су пропорционални са непарним степеном од z_1 , док су чланови реда z_1^4 за $(Z_1 e^2 r_0)^2 / (b\hbar v)^2$ пута мањи од чланова који су пропорционални z_1^2 .

Блоцх је имао супротно мишљење од Bethea, тј. сматрао је да се електрони не могу представити равним таласима из простог разлога што они међусобно интерагују, јер њихове таласне функције међусобно интерферирају. То за последицу има да је ефикасни пресек при таквом судару веома различит од Кулоновог за расејање равних таласа.

Након свега, нерелативистички облик Blochove формуле је

$$S = \frac{4\pi N Z z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} \left(\ln \frac{2mv^2}{I} + \Psi(1) - \operatorname{Re} \Psi \left(1 + i \frac{z_1 \alpha}{\beta} \right) \right) \quad (95)$$

где је $\Psi(z)$ извод логаритма од Гама функције $\Gamma(z)$. Израз $\Psi(1) - \operatorname{Re} \Psi \left(1 + i \frac{z_1 \alpha}{\beta} \right)$

представља Blochovu корекцију формуле за зауставну моћ.

Релативистички облик Blochove формуле је

$$S = \frac{4\pi N Z z_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m v^2} \left(\ln \frac{2mv^2}{I} - \frac{1}{2} \ln(1 - \beta^2) - \frac{\beta^2}{2} + \Psi(1) - \operatorname{Re} \Psi \left(1 + i \frac{Z_1}{\beta} \right) \right) \quad (96)$$

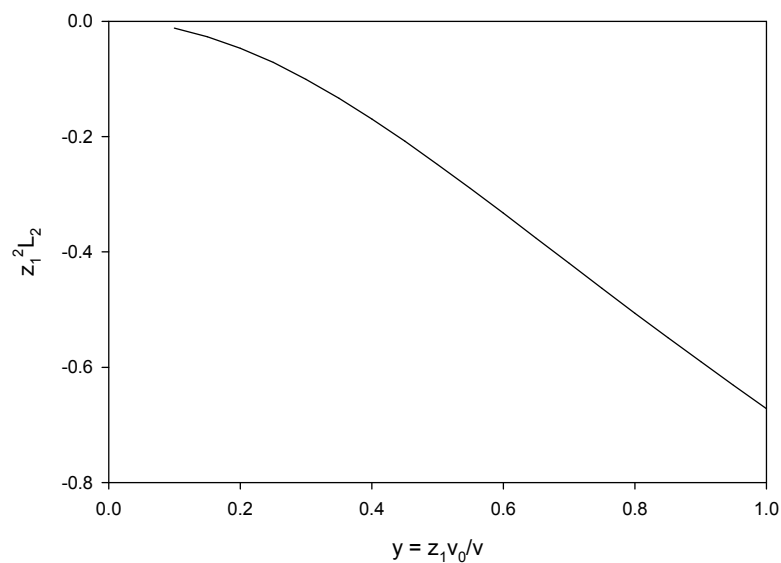
Blochova корекција је доминантна у случају $v \leq 2z_1 v_0$ [Sigmund, 2004].

Bichsel је Blochovu корекцију написао у погоднијој форми [Bichsel, 1990]

$$z_1^2 L_2 = -y^2 (1.202 - y^2 (1.042 - 0.855y^2 + 0.343y^4)) \quad (97)$$

где је $y = z_1 v_0 / v$, v је брзина пројектила, v_0 је Воћгова брзина, $v_0 = \alpha c$; α је константа фине структуре, $\alpha = 1/137$, а c је брзина светлости у вакууму.

На Слици 6. приказана је Blochova корекција, према релацији (97), као функција од $y = z_1 v_0 / v$.



Слика 6. Blochova корекција у функцији параметра $y = z_1 v_0 / v$

Blochova корекција има негативну вредност и смањује вредност зауставне моћи. Са порастом наелектрисања пројектила апсолутна вредност корекције расте, док са порастом енергије пројектила, апсолутна вредност опада.

II 3. Апроксимације уведене при рачунању зауставне моћи

Чињеница је да је пролаз честице пројектила кроз дату материјалну средину јако сложен процес. Наиме том приликом може да се деси низ различитих процеса: интеракција са наелектрисаним честицама, екситација,

јонизација, зрачење услед промене брзине пројектила. Веома је тешко теоријски третирати све ове процесе. Из тог разлога, потребно је увести извесне апроксимације и претпоставке како би, бар под тим условима могао да се реши проблем. У овом делу изнесене су апроксимације и претпоставке под којима су Bohr, Bethe и Bloch извели поменуте једначине. То су [Ahlen, 1980]:

1. Брзина пројектила је много мања од брзине светлости у вакууму (Bohr, Bloch);
2. Брзина пројектила је много већа од карактеристичне орбиталне брзине електрона (Bohr, Bethe, Bloch);
3. Абсорбер је мале густине (Bohr, Bethe, Bloch);
4. $M_1 \gg m\gamma$ (Bohr, Bethe, Bloch);
5. Занемарена је унутрашња структура пројектила (Bohr, Bethe, Bloch);
6. Расејање пројектила уназад је занемарено (Bohr, Bethe, Bloch);
7. Корекције услед губитка енергије зрачења су занемарене (Bohr, Bethe, Bloch);
8. Блиски судари су разматрани као интеракција пројектила са слободним електронима (Bohr, Bethe, Bloch);
9. Блиски судари се догађају између пројектила и електрона који имају класично дефинисану трајекторију (Bohr);
10. Блиски судари се дешавају између веома тешких пројектила и електрона и карактерисани су раванским таласима са почетним стањем у систему центра маса (Bethe);
11. Далеки судари су третирани као диполна у апроксимација првог реда (Bethe, Bloch);
12. Далеки судари су третирани као класично предавање енергије наелектрисаном хармонијском осцилатору (Bohr);
13. Коришћење прве Bornове апроксимације (Bethe);
14. Наелектрисање пројектила је константно (Bohr, Bethe, Bloch);
15. Спин електрона је занемарен у свим типовима судара (Bohr, Bethe, Bloch).

Претпоставка (2) може бити делимично отклоњена увођењем корекције ефекта љуске, о чему ће бити више речи касније. Претпоставка (3) представља ефекат густине и уведена је додатна корекција да би се тај ефекат описао. Претпоставке (4)-(7) важе у случајевима када брзина пројектила није ултрарелативистичка и ако пројектил није електрон. Претпоставке (8)-(12) су уведене како би једном формулом могло да се обухвате блиски и далеки судари.

С обзиром да све три формуле дате од стране ових аутора имају доста додирних тачака и заједничких претпоставки пожељно би било да се оне упореде. На тај начин може да се види под којим условима се ове три формуле међусобно слажу и како се уопште понашају у одређеном опсегу енергија пројектила.

II 4. Поређење Bohrove, Betheove и Blochove формуле за зауставну моћ

Иако су Bohrova, Betheova и Blochova формула за зауставну моћ сличне, оне дају различите резултате за неке опсеге енергија пројектила и атомског броја мете. У овом поглављу представљено је поређење њихових израза за зауставну моћ.

Ради поређења, погодно је написати све три формуле у облику

$$S = \frac{4\pi NZ_1^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 mv^2} \cdot L \quad (98)$$

где је, L , зауставни број, који је у сагласности са Bohrovom, Betheovom и Blochovom формулом, за нерелативистички случај, дефинисан као:

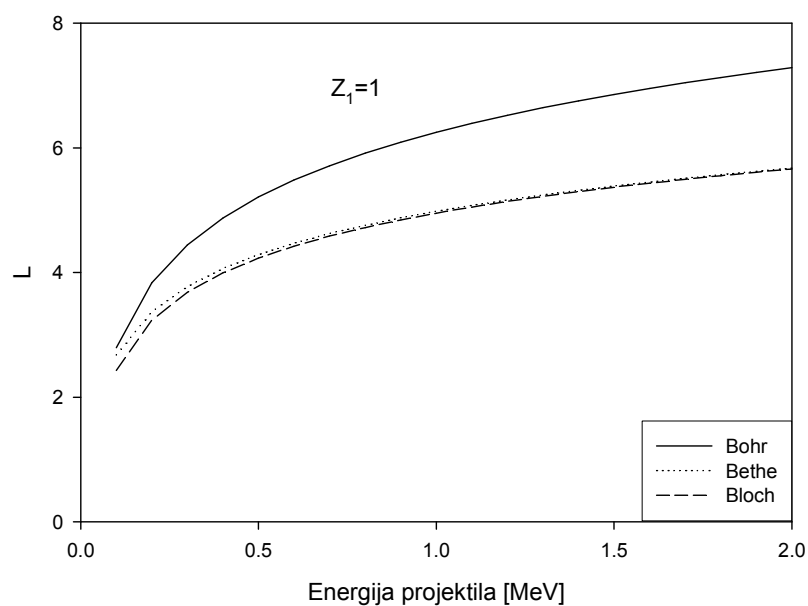
$$L_{Bohr} = \ln\left(4\pi\epsilon_0 \frac{1.123mv^3}{Z_1 e^2 \omega}\right) \quad (99)$$

$$L_{Bethe} = \ln\frac{2mv^2}{I} \quad (100)$$

$$L_{Bloch} = \ln \frac{2mv^2}{I} + \Psi(1) - \operatorname{Re} \Psi \left(1 + \frac{iZ_1\alpha}{\beta} \right) \quad (101)$$

На Сликама (7а и 7б) су приказани зауставни бројеви датих од стране Bethea, Bohra и Blocha према релацијама (99-101) у функцији од енергије пројектила. Blochova корекција је рачуната према релацији (97). За јонизациони потенцијал, I , узета је вредност од 15 eV, што одговара атому водоника.

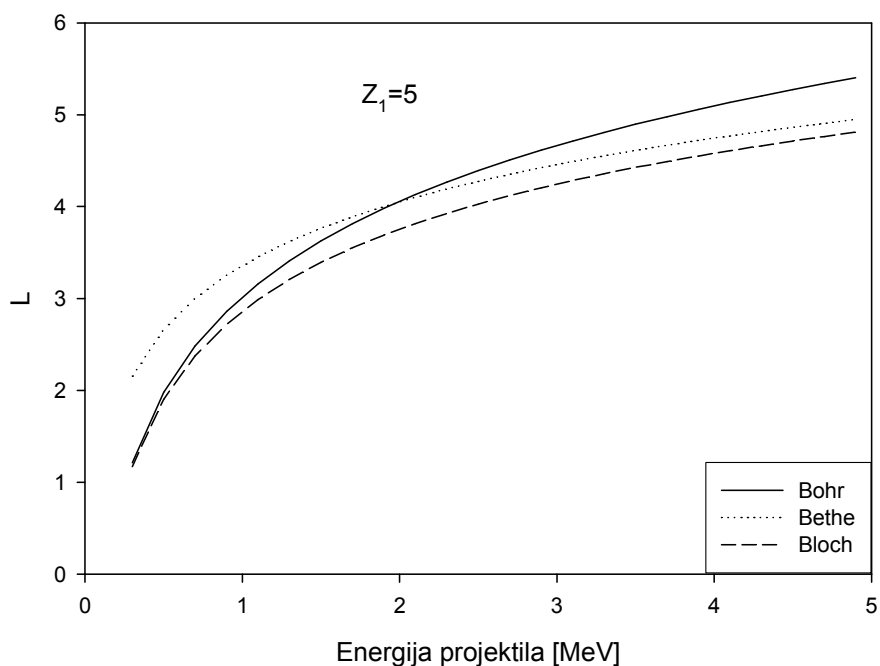
На слици (7а) су приказани зауставни бројеви за $z_1=1$. Види се да су вредности зауставних бројева према Betheu и Blochu једнаке. Вредност зауставног броја коју даје Bohrova теорија су око 1.5 пута веће од оних које дају Bethe и Bloch.



Слика 7 а. Зависност зауставног броја од енергије пројектила за $z_1=1$

Сва три зауставна броја су приближно једнака за $z_1=5$ (Слика 7 б),. Зауставни број према Blochu има нижу вредност од остала два у датом опсегу енергија пројектила 1-5 MeV. И у овом случају, зауставни број према Bohru има

највише вредности у највећем делу домена енергије пројектила. На оба графика се види да је зауставни број растућа функција енергије пројектила.



Слика 7 б. Зависност зауставног броја од енергије пројектила за $z_1=5$

На основу изложеног се може закључити да сваки од модела није до краја конзистентан, већ да се само допуњују у одређеном домену енергије. Главни недостатак ових формула је тај што је за ниске енергије пројектила, зауставни број негативан, што је физички немогуће. Услед недостатака теорије и одступања од експерименталних података, уведене су додатне корекције. Овим корекцијама су описани процеси који се догађају при проласку пројектила кроз материју, а који нису обухваћени у ова три израза за зауставну моћ.

II 5. Корекције Bohr-Bethe-Bloch формуле

Као што се из претходног види, ниједна од понуђених формула за зауставну моћ не описује довољно прецизно пролазак честице кроз материју. То је за очекивање, јер су све три формуле изведене под различитим претпоставкама наведених горе. Процеси који се дешавају при проласку тешких наелектрисаних честица кроз материју су јако сложени и до данас нису потпуно математички описани.

У трагању за тачнијим формулама, дати изрази су допуњавани разним корекцијама. Наиме, при израчунавању зауставне моћи, Bohr-Bethe-Bloch формулу прате корекције које се односе на вредност енергије упадне честице, наелектрисање упадне честице, поларизацију средине кроз коју пролази честица, и друге. Овде ћемо навести неке од најважнијих, које се најчешће користе и највећим делом доприносе прецизнијем израчунавању зауставне моћи.

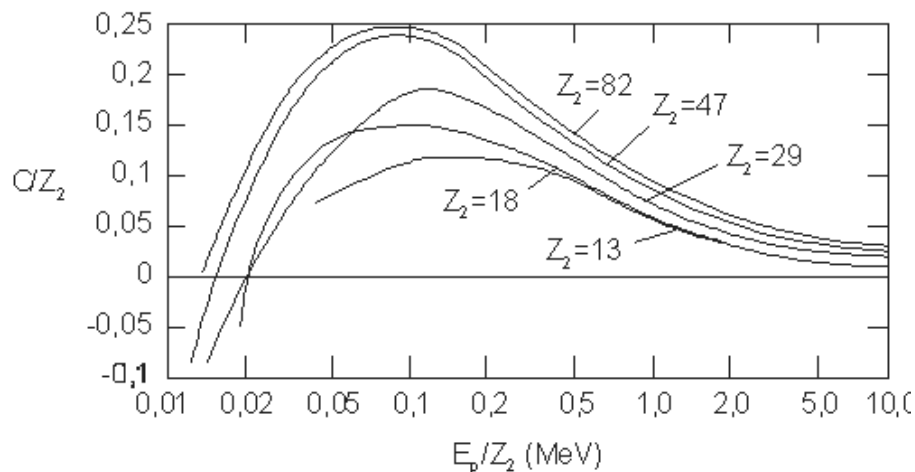
II 5. 1. Корекција љуске (схелл цорреџион)

Корекција љуске се узима у обзир када упадна честица има веома малу енергију, односно када је брзина пројектила приближно једнака брзини везаног електрона. Како енергија упадне честице опада, овај ефекат (ова корекција) долази до изражаја, и мора се узети у обзир интеракција пројектила са сваким електроном у атому мете. Овај ефекат доприноси зауставној моћи и до 6% од укупне вредности. Постоје више метода за рачунање корекције услед ефекта љуске, а најзначајнији су: Таласна функција водоника (Hydrogenic Wave Function - HWF) и Апроксимација локалне густине (Local Density Approximation - LDA).

HWA метод разматра случај интеракције упадне честице са појединачним електронима атома мете, чија су стања описана таласном функцијом водоника. Интеракција између електрона у атому мете се занемарује, и узима се у обзир само интеракција тих електрона са пројектилом.

LDA метод разматра случај интеракције упадне честице са слободним електронским гасом одговарајуће густине. У овој методи се претпоставља да је

градијент електронске густине у мети јако мали, и да интеракција пројектила са једним електроном мете не зависи од интеракције са другим електронима.



Slika 8. Korekcija ljuske kao funkcija energije projektila

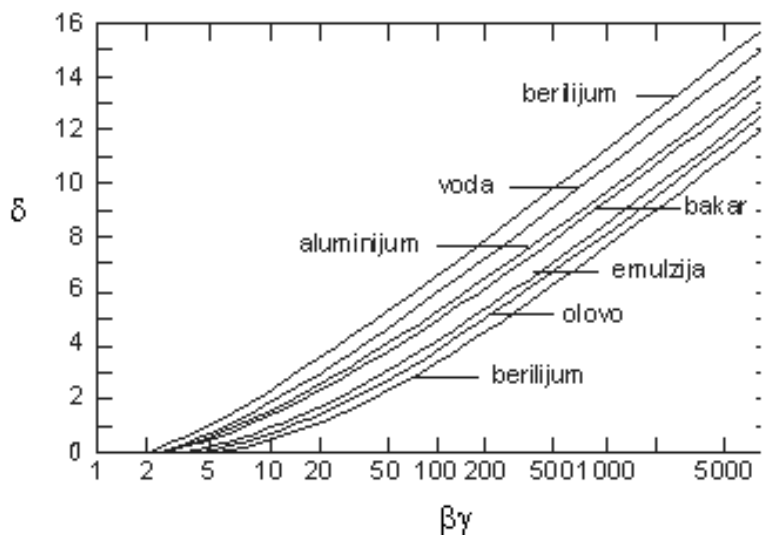
На Слици 8. приказане су експерименталне криве корекције љуске, C/z_2 , за више материјала окарактерисаним атомским бројем z_2 , док се за пројектил користи протон. Ове корекције су дали Vichsel и Fano, [Fano, 1963; Vichsel, 1972]. Види се да за већину материјала ефекат љуске постоји само за ниске вредности енергије пројектила. При вишим енергијама пројектила корекција љуске тежи нули.

II 5. 2. Korekcija usled efekta gustine (density effect)

Поређење експерименталних података и Bohr-Bethe-Bloch формуле за зауставну моћ, веома брзих пројектила, показало је извесна одступања. Одступања су већа уколико је густина материје, кроз коју пролази пројектил, већа.

На пример, зауставна моћ за протон енергије 1000MeV у фотографској емулзији је за 1% мања од предвиђене; на енергији од 8GeV разлика је око 7%;

док за гушће средине разлика је још већа. Овај феномен је назван ефекат густине (денситу ефект). До овог ефекта долази када кинетичка енергија пројектила прелази његову масу мировања, дакле при високим енергијама пројектила. Прва теоријска разматрања овог ефекта потичу од Фермија, [Ферми, 1940] и од Sternheimera, [Sternheimer, 1960, 1966].



На Слици 9. приказан је допринос ефекта густине зауставној моћи за чврста тела и гасове. До ефекта густине долази ако су енергије пројектила реда 1000 MeV и више.

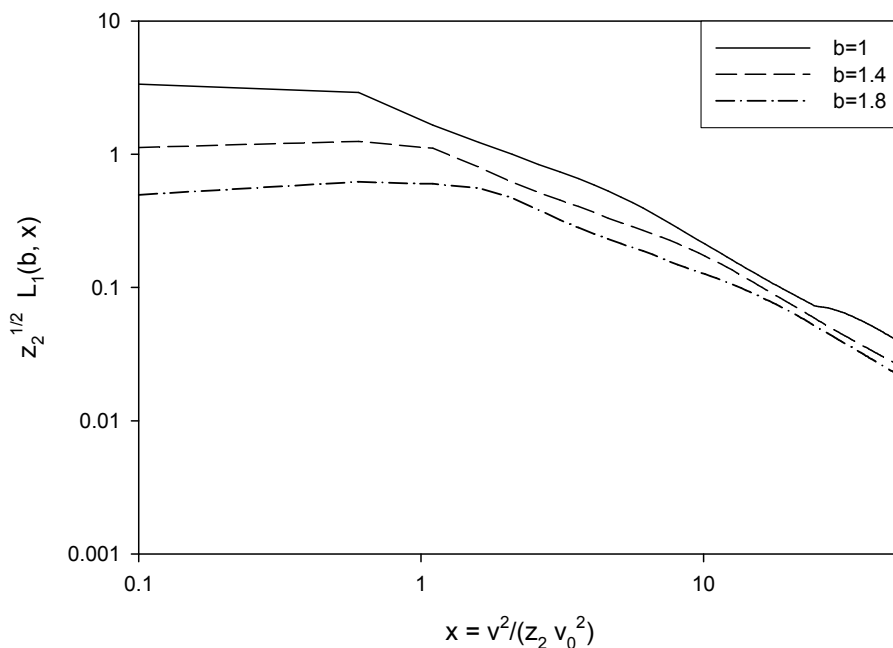
II 5. 3. Баркасов ефекат

Баркасов ефекат представља разлику у зауставној моћи позитивних и негативних пројектила. Наиме, Баркас и његови сарадници [Barkas et al, 1956; Barkas, 1963] су изучавали процесе при распаду $K \rightarrow 3\pi$ у емулзијама и увидели да се домети π^+ и π^- пиона разликују. Андерсен и сарадници [Andersen et al., 1976] су мерили зауставну моћ алфа честица и добили да је више од четири пута већа него зауставна моћ за протоне и деутероне, што је у супротности са Betheovom теоријом. Зато се у Betheovу формулу уводи корекција (Баркасова корекција) којом ће се описати ефекат услед наелектрисања пројектила различитог поларитета.

Баркасова корекција се може представити користећи следећу формулу

$$z_1 L_1 = z_1 \cdot \frac{F\left(\frac{b}{x^{1/2}}\right)}{z_2^{1/2} \cdot x^{3/2}} \quad (102)$$

где су $x = v^2 / (z_2 v_0^2)$, а b је параметар. Табелиране вредности функције F се могу наћи у [Ashley, 1972]. Баркасова корекција је функција енергије (брзине) пројектила и редног броја атома мете, z_2 . На Слици 10 нацртане су криве $z_2^{1/2} L_1$ као функције од редуковане брзине, x , за различите параметре b .



Слика 10. Баркасова корекција као функција енергије пројектила за различите вредности атомског броја мете

Баркасов ефекат се јавља као промена орбитала електрона мете, приликом приближавања пројектила. Тај ефекат се назива *поларизација мете*. На Слици 10 се види да за велике енергије пројектила Баркасов ефекат постаје безначајан пошто се при тим енергијама пројектил веома брзо креће и не утиче на орбите електрона мете.

РЕЗИМЕ

Bethe-ова формула за зауставну моћ

Линеарни губитак енергије дуж путање тешке наелектрисане честице у сударима са атомским електронима у медијуму (у MeV/cm) је основна физичка величина која одређује дозу коју честица створи у медијуму. Ова величина, означена са $-dE/dx$. Зауставна моћ за тешке наелектрисане честице у датој средини, за нерелативистички случај, дата је једначином:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m V^2} nZ \ln \frac{2mV^2}{I}$$

где је z наелектрисање тешке честице брзине V , која се успорава у средини са атомским бројем Z и n атома по јединици запремине, док је m маса електрона, а I средња енергија ексцитације у медијуму. Зауставна моћ зависи од наелектрисања z и брзине тешке честице. Релевантне особине медијума су њена средња енергија ексцитације I и електронска густина n , којој је зауставна моћ пропорционална. Масена зауставна моћ $-\frac{dE}{\rho dx}$ (у MeV·cm²/g) је корисна величина јер изражава брзину губитка енергијенаелектрисане честице по g/cm² пређеног медијума.

Коришћењем релативистичке механике Bethe је извео следећи израз за зауставну моћ униформне средине за тешке наелектрисане честице:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m V^2} nZ \left[\ln \frac{2mV^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2 \right], (*)$$

где је $\beta=V/c$, брзина честице у односу на брзину светлости у вакууму.

Зависност Bethe-ове формуле од z^2 , имплицира да парови честица исте масе и енергије али супротног наелектрисања, као пиони⁺ или миони⁺ имају исту зауставну моћ и домет. Одступање од овог предвиђања у експериментима је теоријски објашњено уласком z^3 и виших чланова у израз за зауставну моћ.

За израчунавање зауставне моћи неког материјала за тешке наелектрисане честице постоје нумеричке табеле.

СРЕДЊА ЕКСЦИТАЦИОНА ЕНЕРГИЈА

Средње ексцитационе енергије за многе елементе су израчунате из квантно механичких дефиниција добијених при извођењу формуле *. Оне такође могу бити мерене у експериментима у којима су све величине које фигуришу познате асим I. Следеће апроксимативне емпиријске формуле се могу користити за процену вредности I у eV за елемент са атомским бројем Z:

$$I = 19.0 \text{ за } z = 1 \text{ водоник}$$

$$I = 11.2 + 11.7z \text{ за } 2 \leq z \leq 13$$

$$I = 52.8 + 8.71z \text{ за } z > 13$$

Пошто се I налази у подлогаритамској функцији у јни *, вредности добијене овом формулом су довољно тачне за многе примене. Вредности за I за елементе мало зависе од хемијске композиције тог елемента као и од стања кондензације материјала. Када је материјал једињење или смеша, зауставна моћ се може израчунати простим сабирањем појединих доприноса конститутивних елемената. Ако има N_u *atoma/cm*³ елемената са атомским бројем u_i и средњу ексцитациону енергију I_i , онда у формули * треба извршити смену

$$n \ln I = \sum_i N_i Z_i \ln I_i$$

$$\ln I = \frac{\sum_i N_i Z_i \ln I_i}{n}$$

Где је n укупан број електрона по cm^3 материјала.

ДОМЕТ

Домет тешке наелектрисане честице је растојање које она пређе до заустављања. Реципрична вредност зауставне моћи је пређено растојање за јединични губитак енергије. Због тога домет $R(T)$ честице кинетичке енергије T је интеграл ове величине до нулте енергије:

$$R(T) = \int_0^T \left(-\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE$$

Слика 5.4 показује домете у g/cm^3 протона, алфа честица и електрона у води или ткиву, костима и олову. За дату енергију протона домет је већи у Pb него у води, што је конзистентно са мањом зауставном моћи олова. Исто поређење је тачно за електроне у води и олову на нижим енергијама ($< 20 \text{ MeV}$). На вишим енергијама расте утицај заочног зрачења за електроне у олову, што смањује њихов домет испод вредности за воду.

Слика 5.5 даје домете у cm протона, алфа честица и електрона у ваздуху на стандардној температури и притиску. За алфа честице у ваздуху на $15 \text{ }^\circ\text{C}$ и притиску 1 atm постоје следеће емпиријске релације, где је домет R у cm , а енергија E у MeV :

$$R = 0.56E \text{ за } E \leq 4$$

$$R = 1.24E - 2.62 \text{ за } 4 \leq E \leq 8$$

Алфа зраци емитовани од извора изван људског тела не представљају опасност, јер је њихов домет мањи од минималне дебљине спољашњег слоја коже, који се састоји од мртвих ћелија (епидермис, минималне дебљине 7 mg/cm^2). Потенцијални здравствени хазард изазива један важан емитер-потомак радона ^{214}Po кад се он удахне и зароби у плућима.

